0 の 0 乗を考える

長野県立松本深志高等学校 3 年
市野 悠

2002 年 12 月 16 日

1 はじめに

1.1 教科書への疑問から

1.1.1 三角関数と他の関数との間に関係はないのか？

数学 II の教科書を開くと,「三角関数[*1]」という分野がある．この関数は他の関数（整関数[*2]，指数関数など）と全く異なる関数の様相を示すが，本当に他の関数と関係がないのだろうか？教科書では三角比から出発した三角関数だが，この文章の第 2 章では三角関数の新しい側面を模索していく．

1.1.2 対数の真数と底は必ず正の実数でなければならないのか？

やはり数学 II の教科書に,「指数関数[*3]・対数関数[*4]」という項目がある．この分野では指数や対数の計算と，そのグラフについて勉強するわけだが，そのなかで真数と底の値による場合分けが大きなテーマになっている．

しかし教科書には真数と底が正の実数の場合しか書いてない．真数や底を負の実数あるいは複素数まで拡張するということについて，この文章の第 3 章で述べる．

1.1.3 0 の 0 乗とは？

この文章ではこのような疑問点を解消していきながら，最終的には 0 の 0 乗を定義することを目標にしている．従って 0 の 0 乗にたどりつく過程では虚数の魅力というものが垣間見えると期待している．

1.2 一般的な注意

1.2.1 この文章の構成について

全体的に，計算を目で追えるように，わかりやすく説明することに努めたので，数学の得意な読者にとっては，説明が冗長に思われるかもしれないが，お許しを願いたい．この文章はあくまで高校生以上を対象とし，

[*1] $y = \sin x$ などと表される．周期函数で，三角比の性質を拡張したものである．

[*2] $y =$(x の多項式）で表される関数である．

[*3] $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ で表される関数で，定点 $(0, 1)$ を通る．

[*4] $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ という関数で，定点 $(1, 0)$ を通る．真数とは x のことで，底とは a のことである．この関数は $x = a^y$ と同値である．

研究の紹介に努めたため，論理的な厳密さには少し欠けている．[*5]

第 2 章は，0 の 0 乗の意味を理解していく上で必要な道具であるオイラーの公式の導出にあてた．あくまで道具であるので必要のない証明は無視し，美しい定理の紹介を重視した．証明を知りたい方は参考文献を見てほしい．どの定理も重要かつ基本的なもので，様々な本に載っている．

第 3 章では，オイラーの公式を使って対数を複素数の範囲まで拡張する．これも 0 の 0 乗を定義するための道具である．

この文章の本題である第 4 章では，0 の 0 乗についての考察と $f(z) = z^z$ という複素関数（複素数変数関数）の振る舞いについて調べる．あらかじめ注意しておくが，この章での話は 0^0 をこういうふうに定義したいという私なりの仮説であって，現段階では $\frac{0}{0}$ と同様に 0^0 は定義できない，というのが暗黙の了解となっている．

1.2.2 記号の表記に関する注意事項

虚数単位には i を採用した．数学者の中には $\sqrt{-1}$ を使う方もいるようであるが，高校生に広く使われていることや，見やすさを考慮した．e は自然対数[*6]の底とする．π は円周率である．基本的に x は実数，z は複素数を表す．

そのほかにも文章中では様々な記号が使われるが，その都度定義していく．

1.2.3 グラフについて

グラフは基本的に MuPAD という数式処理ソフトで描いた．非商用目的ならウェブ上で無料で手に入る．URL は（http://www.mupad.de/）である．無料にもかかわらず，Mathematica などに匹敵する計算ができる．

本文中のグラフのプログラムは，基本的に高知大学の土基氏の HP（http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/）にあるものに少し手を加えたものである．興味のある方は自分で MuPAD をダウンロードして遊んでみるとよい．グラフを見る角度などを，自分で変えたりもできる．

2 三角関数と指数関数をつなげる

2.1 オイラーの公式の導出

2.1.1 テイラー展開

第 2 章では第 4 章を理解する上で必要になるオイラーの公式というものを導出する．この公式によって指数関数と三角関数がつながり，1.1 で述べた疑問点に対する答えが示される．

まずはオイラーの公式を導出する道具であるテイラー展開というものについて解説をしていく．これは整関数でない関数を微分法を利用して多項式に展開していく方法である．

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

を x で微分[*7]すると

$$y' = f'(x)$$

[*5] 例えば大学に入ると，極限の概念を厳密に扱う「ε-δ 論法」なるものを習得する必要があるが，この文章では採用しない．もちろん私がまだ使いこなせていないということでもある．

[*6] 自然対数については次章で説明する．

[*7] ある関数 $y = f(x)$ の，任意の点における接線の傾きを $f'(x)$ と表す．ちなみに $y = ax^n$ を x で微分すると $y' = anx^{n-1}$ である．この節ではこの結果だけを用いる．

であった．これを更に x で微分する（(2.1) を x で 2 回微分する）ことを

$$y'' = f''(x)$$

と表記する．更に，(2.1) を x で n 回微分することを，

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

と表す．ただし (2.1) そのものは

$$y^{(0)} = f^{(0)}(x)$$

と表される．

さて，x の n 次の関数 $f(x)$ が定係数 a_n を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \tag{2.2}$$

と書けると仮定し，a_n を求めるために $f(x)$ を何回も微分していくと

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n \\
f^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
f^{(2)}(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\
f^{(3)}(x) &= 6a_3 + 24a_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n! a_n \\
f^{(n+1)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

となる．ここで上の式に $x = 0$ を代入すると

$$f^{(0)}(0) = a_0, \quad f^{(1)}(0) = a_1, \quad f^{(2)}(0) = 2a_2, \quad f^{(3)}(0) = 6a_3, \cdots, f^{(n)}(0) = n! a_n$$

よって，a_n について

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

といえる．従ってこの結果を (2.2) へ代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0) x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

を得る．a_n が完全に消えて美しい級数になった．この式は，n 次のテイラー多項式と呼ばれており，「$x = 0$ を中心としたテイラー展開」と言う．詳しい説明は省くが，一般に，都合よく選んだ関数では，$n \to \infty$ とした式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \left(= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

も成り立つことが知られている．[*8] この無限級数展開式をテイラー級数と呼ぶ．

ここからはテイラー展開を使って指数関数と三角関数を無限級数に展開していく．

[*8] $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とは，「x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づく」という意味である．

2.1.2 自然対数とは

指数・対数関数を考えていく上で自然対数が不可欠であるので，数学 III で習う内容だが簡略化して述べる．

まず，対数関数 $y = \log_a x$ の微分を考えていく．微分の定義に従うと，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

であった．この定義に従って $\log_a x$ を x で微分すると

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

となる．ここで $\frac{\Delta x}{x} = h$ とおくと

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{xh} \log_a (1 + h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

である．ただし $\lim\limits_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = 2.71828182845 \cdots$ という無理数になることが知られており，この値を e（自然対数の底）で表す．従って

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$$

となり，特に $a = e$ のときは

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$$

である．e を底とする対数を自然対数と呼び，e を省略して

$$\log_e x = \log x$$

と書く．ここからの話では，「対数」とは，基本的に自然対数を指す．

2.1.3 指数関数のテイラー展開

さて，テイラー展開と自然対数の定義については押さえたので，指数関数をテイラー展開して無限級数の形にしていく．まず e^x の微分について考えていくが，微分の定義に従って e^x を x で微分すると

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

となる．ここで $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ という不定形[*9]の極限が問題となるが，この値は 1 に収束[*10]することが知られている．

従って

$$(e^x)' = e^x$$

となる．一般に，何回微分しても同じ形になることが分かると思うが，このような性質をもつ関数は e^x だけであることにも言及しておく．

[*9] 分子も分母も 0 に近づく分数形の極限のことである．

[*10] 極限値がある一定の値に近づくことである．

すると，(??) で述べたテイラー級数を用いて $f(x) = e^x$ を無限級数展開すれば

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

なので

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

となる．指数関数が多項式の形になってしまった．この関係式は が複素数の範囲でも成り立つので， を形式的に に置き換えると， より

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

と無限級数展開できる．この級数は後々重要になってくる．

こうして指数のテイラー展開が完成したので，残すは三角関数である．

2.1.4　三角関数のテイラー展開

この節では，オイラーの公式のもう一人の主人公である三角関数のテイラー展開を考えていく．三角関数はどんな級数に展開されるのだろうか？

ここからは角度を全て弧度法[*11]で表す．三角関数の無限級数展開を考えたいわけだが，まず三角関数の微分を考えていく．重要な公式として

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

がある．この証明については触れないが，三角関数の微分を考えていく上で不可欠である．まず，$\sin x$ を x で微分すると，和積変換公式

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を使って，

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x \\ &= \cos x \end{aligned}$$

を得る．同様に $\cos x$ の微分も，

$$(\cos x)' = -\sin x$$

である．すると $f(x) = \sin x$ を何回も微分することによって，

$$f^{(0)}(x) = \sin x, \quad f^{(1)}(x) = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \cdots$$

[*11] 数 II までの範囲では角の大きさを度数法で表していた．この「度」という単位は数学や，日常生活で使われている十進法との互換性がないので数学的に不便である．そこで，角の大きさを十進法で表す方法として弧度法が使われている．１つの円において弧の長さは中心角に比例するので，単位円（半径 1 の円）の円周の長さ 2π に対する中心角 $360\,\mathrm{deg}$ を 2π ラジアンと呼ぶ．

$$\therefore f^{(0)}(0)=0,\quad f^{(1)}(0)=1,\quad f^{(2)}(0)=0,\quad f^{(3)}(0)=-1,\quad f^{(4)}(0)=0,\cdots$$

となり，これ以降は繰り返しになる．よって $\sin x$ を無限級数展開すると，

$$\sin x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \tag{2.4}$$

同様に $f(x)=\cos x$ を何回も微分すると

$$f^{(0)}(x)=\cos x,\quad f^{(1)}(x)=-\sin x,\quad f^{(2)}(x)=-\cos x,\quad f^{(3)}(x)=\sin x,\quad f^{(4)}(x)=\cos x,\cdots$$

$$\therefore f^{(0)}(0)=1,\quad f^{(1)}(0)=0,\quad f^{(2)}(0)=-1,\quad f^{(3)}(0)=0,\quad f^{(4)}(0)=1,\cdots$$

となり，$\cos x$ の無限級数展開は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \tag{2.5}$$

となる．ここでも三角関数を多項式の形にできた．テイラー展開という手法は R.Taylor (1685–1731) によって考案されたのだが，驚くべき定理である．テイラー展開よりも弱い展開としてマクローリン展開（C.Maclaurin, 1698–1746）があるが，この文章では触れない．

さてここで (2.3),(2.4),(2.5) の 3 つの式をよく眺めると，つながりそうである．

2.1.5 無限級数同士をつなげてオイラーの公式へ

(2.3),(2.4),(2.5) をつなげると，

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ix)^k = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right) \\
&= \cos x + i\sin x
\end{aligned}$$

となる．これがオイラーの公式というもので，三角関数と指数関数という一見関係ないように見える 2 つの関数を，等式で結んでいる．視覚的にも美しいと感じる式である．

かの著名な物理学者 R.P.Feynman（ファインマン）はこの公式についてこう述べている．

> “ We summarize with this, the most remarkable formula in mathematics:
>
> $$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
>
> This is our jewel. ”

この公式からさらに美しい式が誕生する．

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot = -1$$

この式には数学の非常に重要な 3 つの数：超越数 e,π，虚数単位 i が使われている上，実数の虚数乗がマイナスになっていることにも注目すべきであろう．

ここまでは，0 の 0 乗を求めるための道具のうちの 1 つであるオイラーの公式を，紹介してきた．この後さらに，対数を拡張しておく必要があるが，その前にオイラーの公式の性質についての余談を挟んでおく．

2.2　オイラーの公式にまつわる余談

2.2.1　三角関数の存在意義

ここからはオイラーの公式に関する興味深い事実を紹介する．本題に直接関係ない話だが，オイラーの公式が身近に感じられるだろう．

さて $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の x を $-x$ で置き換えると，

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

となり，辺々の和と差をとることにより，

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$
$$\iff \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を得る．この事実は三角関数の存在すら否定しかねない．つまり様々な三角関数をテーマとした問題が，指数法則による機械的な計算に変換されてしまうので，もはや三角関数は図形的な意味しか持たなくなるのである．この公式の威力は次の話で発揮される．

2.2.2　加法定理などなど

三角関数の加法定理とは

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

から派生する６つの定理であった．数年前，東大の入試問題で「加法定理を証明せよ」という問題が出題されて，話題になったこともあった．図形的な考察（つまり三角比の手法）によって解く面倒な問題だが，オイラーの公式を使うと瞬殺である．

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) + i\sin(\alpha \pm \beta) &= e^{i(\alpha\pm\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\pm\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos(\pm\beta) + i\sin(\pm\beta)) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

実部と虚部を見比べて

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

を得る．

ただし実際には，オイラーの公式の証明，e^{a+bi} が指数法則を満たすことの証明などをしてから使う必要があるので，証明問題に使うのは現実的ではない．

それから，ド・モアブルの公式

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

の証明にも使える．数 B の証明では帰納法を使ったかと思うが，オイラーの公式に指数法則を適用することにより

$$(\cos x + i\sin x)^n = (e^x)^n = e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$$

となる．証明が速い上に，n が整数である必要もなくなった．

3　対数の拡張

3.1　真数や底が複素数の対数

3.1.1　対数の定義を拡張する

(2.3) で指数関数を複素数まで拡張したので，その逆算である対数も複素数まで拡張してみる．まず，複素数 z について

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z|, \quad \arg z = \theta$$

とおく．対数は，

$$\log z = a + bi$$

と表されると仮定すれば，

$$z = e^{a+bi} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる．ここで，オイラーの公式より

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

なので，上下の式を比較すると，

$$e^a = r, \quad b = \theta + 2n\pi \ (n \text{ は任意の整数})$$

といえる．実数である a は確定するが，n は任意だから b は確定しない．以上より

$$\log z = a + bi = \log r + i(\theta + 2n\pi) = \log|z| + i\arg z$$

となり，対数の定義は複素数まで拡張された．指数の場合は値が一意的に定まったが，対数の場合は偏角の周期によって，確定的ではない．

オイラーの公式によって指数が拡張されたので，その逆算である対数も拡張されるのは自然な流れである．

3.1.2　i の i 乗について

さて，対数を拡張したので腕試しに i の i 乗を計算してみる．まず

$$z^z = e^{z\log z} \tag{3.1}$$

であることを，示しておく．右辺 $= A$ とおいて両辺の対数をとると

$$\log A = \log e^{z\log z} \iff \log A = z\log z \iff A = z^z$$

より上の式が成り立つことが分かる．この等式はこれからも随所に出てくるので重要．

これを使うと

$$i^i = e^{i\log i}$$

だが，ここで前節で拡張された対数を使って，$\log i$ を計算すると，周期も考慮に入れて

$$\log i = \log|i| + i\arg i = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) (n \text{ は整数})$$

となるので，

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}$$

を得る．i の i 乗が実数になるという結果には驚かされる．

3.1.3　対数の多価性について

上の例でも分かるように複素数の範囲での対数の値は一意的には定まらない．これは偏角というものを導入した結果，2π の倍数分だけ値が変わってくるからである．このようなものを多価関数と言う．しかし多価関数は，ある変数について値が 1 つに定まらないので，もはや**関数**とは言えない．そこで，偏角を $-\pi$ から π までに設定したものを主値と呼んで，関数のような性格を持たせることがある．

従って i の i 乗の主値は，i の偏角を $\dfrac{\pi}{2}$ とすると，$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ となる．

4　0 の 0 乗について

4.1　極限による定義

4.1.1　0 の 0 乗は 1 なのか 0 なのか？

ここまでは道具の解説をしてきたが，いよいよ本題である 0 の 0 乗に迫っていく．

まず x が 0 以外の実数のときは

$$x^0 = 1, \quad 0^x = 0$$

であるが，これでは $x \to 0$ の極限を取ると

$$0^0 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

となってしまい，1 つに決まらない．なぜこのようなことが起こってしまうのだろうか？

上の例では極限のとりかたに問題がある．つまり x^x というものを考えたときに，x と y を 0 に近づけるときの極限のとりかたが異なるために，様々な値をとってしまうのである．従って 0^0 を考えるためには，x^x の極限を考えるのが自然であろう．

4.1.2　右側極限

さて，$y = x^x$ という関数の極限を考えていくが，とりあえずこの関数は $x > 0$ で定義されているものとする．なぜなら $x < 0$ の時は？というと，例えば $x = -\frac{1}{2}$ のときに x^x は虚数になってしまうのである．このような理由から，とりあえず $x \to +0$ の極限*12だけを考えることにする．

これを考えるために

$$\lim_{x \to +0} \frac{x}{e^x} = 0$$

という公式が必要になるのだが，イメージするのは簡単で，x の増え方に対して e^x という指数は膨大な増え方をするということである．(3.1) より $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x = \lim_{x \to +0} e^{x \log x}$ であるから $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x$ を調べればよいことになる．そこで，

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

と変形しておく．ここで $\frac{1}{x} = e^t$ とおくと $x \to +0$ のとき $t \to \infty$ なので

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\log e^{-1}}{e^t} = -\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t}$$

*12 0 より大きい値をとりながら限りなく 0 に近づくという意味である．

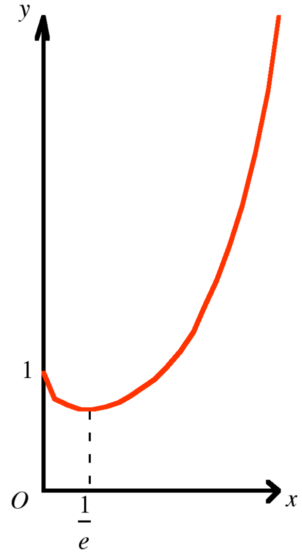

図 1　$y = x^x$ のグラフ $(x > 0)$

と計算でき，

$$\lim_{x \to +0} x^x = \lim_{x \to +0} e^{x \log x} = e^0 = 1$$

となる．これが x^x の右側極限と呼ばれるものであるが，$x \to -0$ つまり左側極限[*13]を考えていないので，0^0 の 1 つの可能性であって，確定的ではない．[*14]

4.1.3　$y = x^x$ のグラフ

ところで $y = x^x \quad (x > 0)$ はどんなグラフになるのだろうか？対数微分法を使うと，両辺の対数をとって

$$\log y = x \log x$$

で，両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1 \\ \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} &= x^x(\log x + 1) \end{aligned}$$

となる．$x > 0$ のとき $x^x > 0$ より $\frac{dy}{dx} = 0$ となるのは，

$$\log x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

のときである．当然 $\lim_{x \to \infty} x^x = \infty$ で，既に $\lim_{x \to +0} x^x = 1$ は分かっているので，増減表は省略するが，グラフは図 (1) のようになる．不思議な曲線である．点 $(0, 1)$ に近づいていく様子がよく分かる．しかし必然的に，x が負の時はどうなるのか？という疑問がわいてくる．

[*13] 0 より小さい値をとりながら限りなく 0 に近づくという意味で，右側極限の逆である．

[*14] もしも右側極限と左側極限とが一致すれば，関数はその点において連続であると言える．

4.1.4　左側極限

実数 x では x^x の全ての値を考えることはできない．従って複素数 z で考えていく必要がある．ここで exp 関数なるものを使うが，$\exp(x) = e^x$ と考えてもらって結構である．

(3.1) を使って，

$$z^z = \exp(z \log z) = \exp(z(\log|z| + i \arg z))(= e^{z(\log|z|+i\arg z)})$$

である．ここでオイラーの公式：$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ を使って，

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -0} z^z = \lim_{z\to -0} \exp(z(\log|z| + i \arg z)) &= \left[\lim_{z\to -0} \exp(z \log|z|)\right]\left[\lim_{z\to -0} \exp(iz \arg z)\right] \\
&= \exp\left(\lim_{z\to -0} z \log(-z)\right) \cdot \lim_{z\to -0}(\cos(z \arg z) + i \sin(z \arg z)) \\
&= \exp\left(\lim_{z\to -0} \frac{\log z}{-\frac{1}{z}}\right) \cdot \lim_{z\to -0}(\cos(z \arg z) + i \sin(z \arg z))
\end{aligned}$$

右側極限と同様に $\frac{1}{z} = e^t$ とおくと

$$\exp\left(\lim_{z\to -0} \frac{\log z}{-\frac{1}{z}}\right) = \exp\left(\lim_{z\to -0} \frac{-t}{e^t}\right) = \exp 0 = 1$$

より

$$\lim_{z\to -0} z^z = \lim_{z\to -0}(\cos(z \arg z) + i \sin(z \arg z))$$

となる．ここで，一般角 $\arg z$ は多価関数であることに注意すると，

$$\lim_{z\to -0} z \arg z = 0$$

である．$\cos, \sin$ 関数は複素数の範囲でも連続[*15]であることが知られているので，

$$\lim_{z\to -0}(\cos(z \arg z) + i \sin(z \arg z)) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

となる．以上より

$$\lim_{z\to -0} z^z = 1$$

が示された．

上記の左側極限については，証明を見たことがないので，厳密に考える必要があるが，証明の概要は以上のようになる．

同様に，複素数の範囲で

$$\lim_{z\to +0} z^z = 1$$

も示せるので，一般に

$$\lim_{z\to 0} z^z = 1$$

と言える．従って 0^0 の 1 つの可能性として

$$0^0 = 1$$

[*15] 厳密には，複素数の範囲で三角関数の無限級数や無限積：$\sin z = z \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ などを使って示す必要があるが，ここでは扱わない．

が定義された．

式の上では解決したが，複素数も含めた４次元空間で z^z の左側極限が 1 に近づくイメージはまだできない．従って，この章の 4.3 で近づく様子を視覚化していく．いずれにしても，以上の結果を見ると，0 という数の持つ生命力に驚かされる．単に「無」を意味する数ではない．

4.2　２項定理による解決

4.1 では極限による，いわば定石で 0^0 に挑んだが，私の友人の近藤さん（兵庫県在住の高３生）によって，美しい解答がもたらされた．話の本筋からは少しずれるがここで紹介したい．

２項定理

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k$$

に $x=-1$ を代入すると

$$0^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^k$$

となり，ここで $n=0$ を代入すると

$$0^0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k = (-1)^0 = 1$$

となる．

$\sum$ は単に和を表す記号ではなく，和分としての性格をも内包しているというのがこの式の真意であるが，ここではそのことについては触れないことにする．差分和分について詳しく知りたい方は近藤さんの HP（http://sophere.s7.xrea.com/）を見てほしい．面白い世界であるが，非常に難しい内容まで含まれている．

4.3　0 の 0 乗を視覚化する

4.3.1　$x \to -\infty$ の極限

さて $f(z) = z^z$ のグラフを知りたいわけだが，まずは x^x で $x \to -\infty$ の極限を考える．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x^x &= \lim_{x\to-\infty} e^{x\log x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x(\log|x|+i\arg x)} = \lim_{x\to-\infty} e^{x\log(-x)} \cdot e^{ix\arg x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{-x\log(-x)} \cdot e^{ix\arg x} = 0 \cdot \left(\lim_{x\to-\infty} e^{ix\arg x}\right) = 0\end{aligned}$$

となるが，当然

$$\lim_{x\to+\infty} x^x = \infty$$

は見当がつく．これで実数変数のグラフを描く要素は揃った．次の節では複素数の値を取るグラフを描いてみる．

4.3.2　実数から複素数への対応

$\log x$ は x が実数の範囲では多価関数になることから，

$$x^x = e^{x\log x} = e^{x(\log|x|+i\arg x)}$$

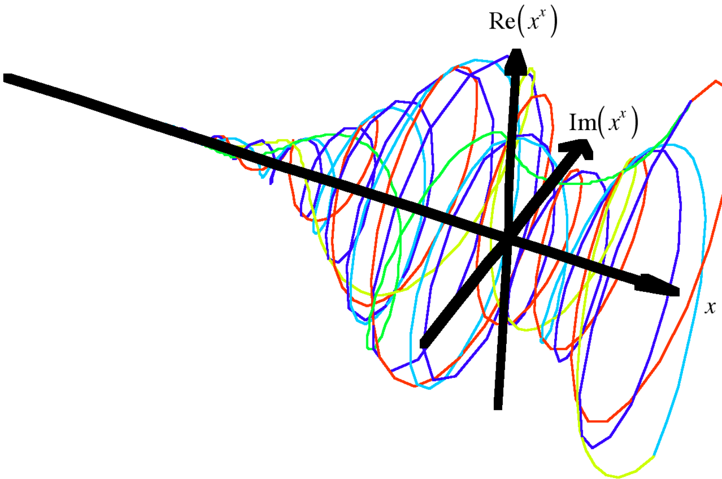

図 2　$y = x^x$ のグラフ（様々な分枝のうちのいくつかを示している）

であり，x は実数なので

$$\arg x = \pi n \ (n \text{ は整数})$$

である．このことから $y = x^x$ は多価関数となり，その分枝[*16]は無限に存在することが分かる．従って n に様々な整数を代入することによって，いくつかの分枝を描くことができる．（図 2）$\mathrm{Re}(x^x)$ は x^x の実部，$\mathrm{Im}(x^x)$ とは x^x の虚部という意味である．従ってそれぞれの分枝は，「実数 x に対して，x^x の実部と虚部が決まる」ということを意味する．また，MuPAD 上でこのグラフを回転させると $\lim_{x \to 0} x^x = 1$ となることがよく分かる．

4.3.3　複素数から複素数への対応

上では変数が実数の範囲のグラフだったが，複素変数まで含めて，z^z のグラフを考えてみる．図 3 は「z の実部と虚部」と「z^z の実部と虚部」という 2 枚の複素数平面の対応を示している．これが z^z のグラフの最終形ということになる．なお，このグラフは 4 次元空間を無理矢理 2 次元平面で描いているので，図形的な意味は全くないことを注意しておく．

5　あとがきとこれからの課題

5.1　とりあえずの帰結

全ての疑問は，夏休みに出会った次のような問題から始まった．

「$y = x^x \quad (x > 0)$ の最小値を求めよ．」

どこにでもありそうな受験数学の問題で，$y = x^x$ のグラフを描かなくても増減表を考えれば解くことができる．しかし，$y = x^x$ という関数の特殊性とともに，$x > 0$ という条件への疑問は，捨て去り難いものがあっ

[*16] 多価関数の切れ目である．多価関数は分枝の集合，と考えるとよいだろう．

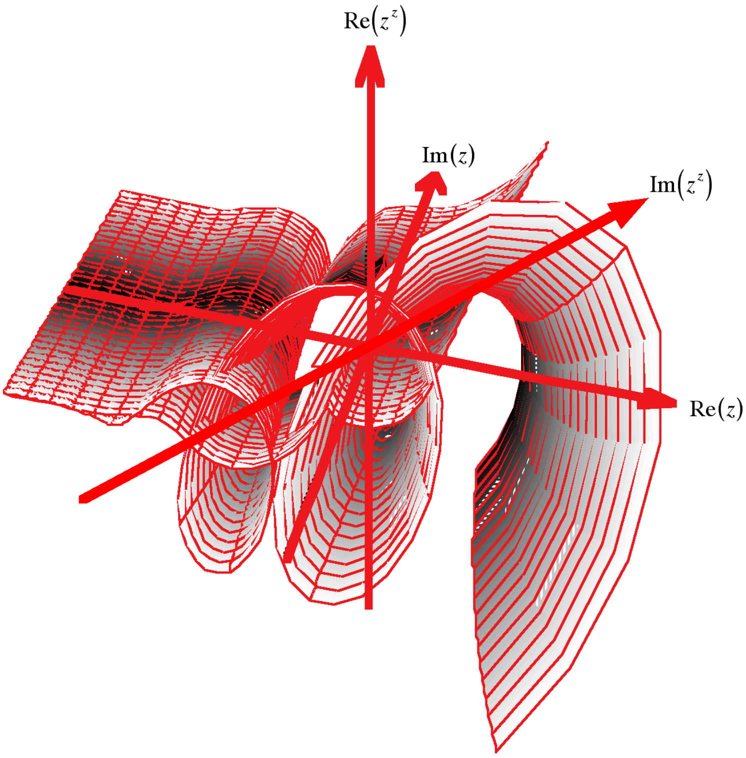

図 3　$f(z) = z^z$ のグラフ

た．さらに，いざグラフを描こうとすると，$0^0 = 1$？という疑問も湧いてくる．これは魅力的だ，ということで研究を始めたわけだが，芋蔓式に問題が出てきた．

この文章では z^z のグラフを描いたことによって，一応の終結をみた．しかしこのグラフは 4 次元空間を 2 次元平面に変換したものであって，この関数の本質は失われてしまったような気がする．さらに，この文章では 0 の 0 乗にこだわるあまり，極限計算に終始してしまった感があるが，解析関数としての性格についても考えるべきである．

5.2　x^x の応用例

例えば x^x の不定積分は発見されていないが，

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

であることが計算できる．x^{-x} についても同区間で可能である．

さらに

$$y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

という関数について調べてみるのも面白いだろう．

参考文献

[1] 土基善文『0 の 0 乗のはなし（シリーズはじめよう数学５）』（日本評論社, 2002）
[2] L. V. Ahlfors『複素解析』（現代数学社, 1982）
[3] 高木貞治『解析概論（改訂第三版軽装版）』（岩波書店, 1983）
[4] 吉田武『オイラーの贈物』（ちくま学芸文庫, 2001）
[5] 高瀬正仁『dx と dy の解析学 –オイラーに学ぶ–』（日本評論社, 2000）