超幾何函数の世界
第2回　超幾何函数とは

京都大学理学部1年　市野 悠

2005 年 1 月 15 日

前回は物理学で Γ 函数が出てくる例を紹介しましたが，今回はようやく超幾何函数を登場させます．

大学入試でよく出てくる問題に，微小振幅を仮定して単振り子の周期を決定する問題があります．答えを暗記してしまうほど簡単な近似解がよく使われますが，これを近似なしに解こうとすると，解として超幾何函数が現れるというお話です．

1　重力影響下での単振り子

質量を無視できる長さ L の棒の先に質量 m の質点が取り付けられている系を考える．これは重力加速度 g の影響下で自由に振れるようにもう一端が固定されている．

この質点の振れ角を θ として，接線方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}(L\theta) = -mg\sin\theta$$

すなわち

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

となる．これを近似なしに解くために見方を変えて

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{L}\cos\theta\right] = 0$$

と思う（実はこれはエネルギー保存則になっています）．括弧内は定数であり，それを決めるには $t=0$ で $\theta=\theta_0$ という初期条件があればよく，

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

となる．２倍角の法則を使うと

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{L}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

と書き直せる．ここで $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ とし，変数分離をすると

$$2\sqrt{\frac{g}{L}}\int dt = \int \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}}$$

である．さらに $\sin\phi = \frac{\sin(\theta/2)}{k}$ なる変数変換をして

$$\sqrt{\frac{g}{L}}\int dt = \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}$$

となるが，これは第１種楕円積分：

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi'}}$$

である．

４分の１周期で振れ角 θ が 0 から θ_0 に変化する間に ϕ は 0 から $\pi/2$ に変化するので，

$$\sqrt{\frac{g}{L}}\int_0^{T/4} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}$$

となる．右辺は第１種完全楕円積分と呼ばれており，$F(k)$ と表すことにする．

ところで実数 s について函数 $(1-x)^s$ を $x=0$ で Taylor 展開すると

$$(1-x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} x^k$$

であるが，以後 Pochhammer 記号 $(a)_n$ を $(a)_0 = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ について $(a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)$ と定義し，これを使って表すと

$$(1-x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)_k}{k!} x^k$$

となる．ただし $(-s)_k = (-1)^k(s-k+1)_k$ とする．この記法は階乗の！と対応しているので，いくつか同様の性質が簡単にわかる．

この式を使うと先の被積分函数は，区間の端を除いて

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} k^{2n}\sin^{2n}\phi$$

と書ける．

ところで，$F(k)$ で項別積分する際に $\sin^{2n}\phi$ の積分を考える必要があって，大学入試でよく出てきそうな部分積分をすると

$$\int \sin^{2n}\phi d\phi = -\frac{\sin^{2n-1}\phi\cos\phi}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2}\phi d\phi$$

となる．もちろんこれを n 回程度続けたいわけだが，そのとき sin とか cos の冪乗が入った項は 0 や $\pi/2$ を代入して 0 になるので結局求める定積分 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi d\phi$ は

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi d\phi = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\int_0^{\pi/2} d\phi$$

これを先ほどの Pochhammer 記号を使って書き直し，整理すると

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi d\phi = \frac{\pi}{2}\frac{(1/2)_n}{n!}$$

なので，最終的に

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}k^{2n}\sin^{2n}\phi d\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}k^{2n}\left(\frac{\pi}{2}\frac{(1/2)_n}{n!}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n(1/2)_n}{n!(1)_n}k^{2n} \end{aligned}$$

となる．

2　Gauss の超幾何微分方程式

任意の 2 階斉次線型微分方程式は，函数 $P(z)$ および $Q(z)$ を使って

$$\frac{d^2}{dz^2}u(z) + P(z)\frac{d}{dz}u(z) + Q(z)u(z)$$

という形で表されるが，$P(z)$ と $Q(z)$ が有理函数（複素係数でも OK）の場合，変数変換によって次のように変形できる．

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c-(a+b-1)z\}\frac{du}{dz} - abu = 0$$

これが Gauss の**超幾何微分方程式**と呼ばれており，この方程式の一般解が超幾何函数と深く関連していることをこれから示す．

代入法を使って解くので，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+s}$ が解だと思って，さきほどの方程式に代入する（ただし s は任意の数とする）．整理すると

$$s(s+c-1)a_0z^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+s+1)(n+s+c)a_{n+1} - \{(n+s+a+b)(n+s)+ab\}a_n]z^{n+s} = 0$$

であり，係数を比較すると，

$$s(s+c-1)a_0=0, \quad a_{n+1}=\frac{(n+s+a+b)(n+s)+ab}{(n+s+1)(n+s+c)}a_n$$

となる．ただし自明でない解を求めたいので，$a_0\neq 0$ であり，$s=0$ と $s=1-c$ の２通りを考える．

$s=0$ のとき，$a_{n+1}=\frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}a_n$ なので

$$a_n=\frac{a(1+a)\cdots(n-1+a)b(1+b)\cdots(n-1+b)}{n!c(1+c)\cdots(n-1+c)}a_0=\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}a_0$$

となる．したがって解の１つ

$$u_1(z)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n$$

が得られた．ここで出てきた $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n$ が (Gauss の) 超幾何函数であり，$F(a,b;c;z)$ と書く．a_n の表式をみれば分かるように，a や b が負の数なら n がある数より大きくなると分子が 0 になって $F(a,b;c;z)$ が無限級数にはならないし，c が正でなければ分母が 0 になって，また別に考える必要があることに注意する．

$s=1-c$ のときも同様に，$a_{n+1}=\frac{(n+1-c+a)(n+1-c+b)}{(n+2-c)(n+1)}a_n$ から

$$u_2(z)=a_0z^{1-c}F(1-c+a,1-c+b;2-c;z)$$

となるので，結局一般解は $u_1(z)$ と $u_2(z)$ の線型結合だから任意定数 α，β を使って

$$u(z)=\alpha F(a,b;c;z)+\beta z^{1-c}F(1-c+a,1-c+b;2-c;z)$$

と書き表される．

ここでは $F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n$ と定義したが，実際はこれを一般化して

$${}_pF_q(a_1,a_2,\ldots,a_p;b_1,b_2,\ldots,b_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{n!(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n}z^n$$

と定義するのが普通である．たとえば $F(a,b;c;z)$ は ${}_2F_1(a,b;c;z)$ と同じである．

3 完全楕円積分

はじめに議論していた単振り子の周期 T を超幾何函数で表すと

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

となって，運動方程式は解かれた．つまり第 1 種完全楕円積分は

$$F(k) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

になるということである．

練習問題

第 2 種完全楕円積分：

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

を超幾何函数で表すと

$$E(k) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

になることを証明してください

あとがき

前回は本当に超幾何の超の字も出てこない文章でしたが，ようやく今回から超幾何っぽくなってきました．

次は Schrodinger 方程式です．

誤植，意見，苦情等は，次のアドレスまで．それから，数学や物理で日本語訳に迷う単語に出会ったときにどうしているか皆さんに聞いてみたいと思います．いい本やサイトをご存じでしたら，是非お教えください．

ichino@mathscphys2004.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

参考文献

[1] James B. Seaborn, Hypergeometric Functions and Their Applications, Springer, 1991.
[2] ランダウ, リフシッツ『力学（増訂第三版）』（東京図書, 1974）
[3] 高木貞治『解析概論（改訂第三版）』（岩波書店, 1983）