相転移における揺らぎの理論

A.Z. PATASHINSKII AND V.L. POKROVSKII

(II 章) 強く揺らいでいる系の熱力学

(3 節) 揺らぐ諸量の代数

揺らいでいる量およびその微分から，これまた揺らいでいる量を構成できることはすでにみた．例えば，秩序変数 ϕ とそのグラジエントからエネルギー密度 ϵ を作ることができる．(I.4.12) 式のハミルトニアン*訳注 1で与えられる Landau モデルなら ϵ と ϕ の関係は次のようである．

$$\epsilon = \frac{1}{2}\alpha\phi^2$$

すべての揺らぐ量の関数が新しい揺らぐ量になっているかどうか，そしてそれが元の揺らぎとは線形独立であるか？という問いが自然に湧き上がってくる．

この問いに対しては（I 章 6 節で議論した）自由場の場合を解析してみよう．この場合，自由場 $\phi(\vec{x})$（簡単のためスカラーと仮定する）だけでなく，すべての整数冪 $:\phi^n(\vec{x}):$ も well-defined なスケーリング次元をもつ*訳注 2．したがって我々はスカラー量の組

$$:\phi(\vec{x}):,\quad :\phi^2(\vec{x}):,\quad :\phi^3(\vec{x}):,\quad \cdots,\quad :\phi^n(\vec{x}):,\quad \cdots \tag{1}$$

を作ることができ，それぞれの次元は

$$\Delta_\phi = (d-2)/2,\quad 2\Delta_\phi,\quad 3\Delta_\phi,\quad \cdots,\quad n\Delta_\phi,\quad \cdots \tag{2}$$

である．自由場から生成された，局所的に正則な平均ゼロの関数 $A(\vec{x})$ はすべて Maclaurin 級数

$$A(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n :\phi^n(\vec{x}): \tag{3}$$

の形に表せる．

それでは $:\phi^n(\vec{x}):$ の次元が $n\Delta_\phi$ に等しくなる理由を説明しよう．そのために以下の形をした相関関数を考える*訳注 3．

$$\langle\langle :\phi^2(\vec{x})::\phi^2(\vec{x}'): \rangle\rangle \tag{4}$$

Wick 則を利用すれば (4) 式は次の形になる．

$$\langle\langle :\phi^2(\vec{x})::\phi^2(\vec{x}'): \rangle\rangle = 2\langle\langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{x}') \rangle\rangle^2 \tag{5}$$

Date: 2008 年 7 月 2 日.

*訳注 1 ここでは熱力学ポテンシャルの形で与えられた

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2}\int \{c(\nabla\phi)^2 + a\phi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}b\phi^4(\vec{x}) - 2h(\vec{x})\phi(\vec{x})\}dV$$

を使う

*訳注 2 Wick の定理による

*訳注 3 ここで揺らぎ平均（既約平均）の定義 $\langle\langle AB\rangle\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$ を使った

等式 (5) は $\Delta_{:\phi^2:} = 2\Delta_\phi$ を表している．同様にして $:\phi^n:$ の形をしたすべての量の次元を求めることができる．よって自由場の場合には，任意のスカラー $A(\vec{x})$ を展開できるようなスカラー場の完全系 (1) が存在することが分かる．相互作用する場の場合にも，相転移点上ではこのような組が存在することを仮定しよう．これは well-defined な次元 Δ_n をもつ dilatation 作用素

$$(6) \qquad A_n(b\vec{x}) \longrightarrow b^{-\Delta_n} A_n(\vec{x})$$

の固有関数になっている $A_n(\vec{x})$ が可算個存在することを意味する．ただし，局所的な量 $A(\vec{x})$ は $A_n(\vec{x})$ の線形結合で表されるとする．

$$(7) \qquad A(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n A_n(\vec{x})$$

相互作用する場の場合には $A_n(\vec{x})$ の次元 Δ_n はもはや最小の次元 Δ_1 と単純な関係にはなく，理論の構造定数になっている．

等式 (7) は $\langle\langle A(\vec{x})B(\vec{x}')\rangle\rangle$ の形をした相関が以下のように計算されたとき正しい結果を返す，という意味で解釈されるべきである．

$$(8) \qquad \langle\langle A(\vec{x})B(\vec{x}')\rangle\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle\langle A_n(\vec{x})B(\vec{x}')\rangle\rangle$$

上記仮説を**局所代数仮説**と呼ぶことにしよう．

これで，スケール不変性の仮説をいくぶん明確に定式化することができるようになった．完全系（代数）に属する A_n という量は well-defined な次元 Δ_n をもっている．秩序変数の場 $\phi(\vec{x})$ や $\epsilon(\vec{x})$，そして局所性をもつ他の物理量は (7) 式のような線形結合で表されるであろう．物理量の次元は，展開各項のうち最低の次元をもつ項で決定される．

さて，$A(\vec{x})B(\vec{x}')$ という別々の点に値をもつふたつの量の積を考えることにしよう．$|\vec{x}-\vec{x}'|$ が原子間距離 r_0 程度の場合，このような積は局所的な量とみなすべきである．一方 $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg r_0$ の場合にはもちろんこれは成り立たない．しかしこの揺らいでいる量を $\vec{x}$ や $\vec{x}'$ から距離 $R \gg |\vec{x}-\vec{x}'|$ だけ離れた点から眺めれば演算子 $A(\vec{x})B(\vec{x}')$ は局所的演算子と似た性格を獲得することが期待される．**双局所代数仮説**を以下のように定式化しよう．

$$(9) \qquad A(\vec{x})B(\vec{x}') = \sum_n \mu_n(\vec{x},\vec{x}')A_n(\vec{x})$$

ここで線形結合の係数 μ_n は $\vec{x}$ および $\vec{x}'$ に依存する．公式 (9) は，$|\vec{x}-\vec{x}'| \ll |\vec{x}-\vec{x}''|$ の条件の下，$\langle A(\vec{x})B(\vec{x}')C(\vec{x}'')\rangle$ のタイプの相関関数が計算されたときに，この等式の左辺と右辺が同じ結果を返すという意味で解されねばならない．したがって $|\vec{x}-\vec{x}''|$ が大きい場合には，小さい比 $|\vec{x}-\vec{x}'|/|\vec{x}-\vec{x}''|$ の冪で漸近展開が得られる．

$$(10) \qquad \langle A(\vec{x})B(\vec{x}')C(\vec{x}'')\rangle = \sum_n \mu_n(\vec{x},\vec{x}')\langle A_n(\vec{x})C(\vec{x}'')\rangle$$

(9) の展開で $n=0$ の項は $A_0 = 1$ および $\mu_0(\vec{x},\vec{x}') = \langle A(\vec{x})B(\vec{x}')\rangle$ である．$n \neq 0$ の他の量 A_n は $\langle A_n\rangle = 0$ となるように定義されているものとする．(9) の形をした展開全体は揺らぐ量の代数と今後呼ばれ，係数 μ_n はこの代数の係数になっている．

もしも $A(\vec{x})$ や $B(\vec{x}')$ がそれぞれ well-defined な次元 Δ_A および Δ_B をもつなら，係数 $\mu_n(\vec{x},\vec{x}')$ は次元 $\Delta_A+\Delta_B-\Delta_n$ をもった $|\vec{x}-\vec{x}'|$ の同次関数であることが分かる．ただし Δ_n は演算子 A_n の次元であった．

以下，(9) の簡単な例を考えよう．

自由場． まず場 $\phi(\vec{x})$ のふたつの値について積をとろう．

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad \phi(\vec{x})\phi(\vec{x}') &= \langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{x}')\rangle + :\phi(\vec{x})\phi(\vec{x}'): \\
&= \langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{x}')\rangle + :\phi^2(\vec{x}): + (x'_\mu - x_\mu) :\phi(\vec{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}: + \cdots
\end{aligned}
$$

ここで Wick の定理を使い，$\vec{x}'$ が $\vec{x}$ に近いことを仮定して $\phi(\vec{x}')$ をテイラー級数で展開した．自明な初項を除けば，離れた点 $\vec{x}''$ から眺めると $\phi(\vec{x})\phi(\vec{x}')$ はエネルギー密度 $:\phi^2(\vec{x}):$ のように見えることをこの公式 (11) は示している．

同じテクニックを使えば，他の関係を導くことも容易である．すなわち

$$
(12)\qquad \phi(\vec{x}) :\phi^2(\vec{x}'): = \frac{2}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{d-2}}\phi(\vec{x}) + \frac{2(x'_\mu - x_\mu)}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{d-2}}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} + :\phi^3(\vec{x}): + \cdots
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad :\phi^2(\vec{x})::\phi^2(\vec{x}'): &= \frac{2}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{2(d-2)}} + \frac{4}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{d-2}} :\phi^2(\vec{x}): \\
&\quad + \frac{4(x'_\mu - x_\mu)}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{d-2}} :\phi(\vec{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}: + :\phi^4(\vec{x}): + \cdots
\end{aligned}
$$

であるが，(12) 式と (13) 式の展開係数は可能なコントラクションの個数で決まっている．例えば (12) 式の初項ではひとつの縮役の結果得られるものだが，その手続きには二通りある．

$$
\phi(\vec{x}) :\phi(\vec{x}')\phi(\vec{x}'): \text{と} \phi(\vec{x}) :\phi(\vec{x}')\phi(\vec{x}'):
$$

3 次元 Ising 模型（あるいは格子気体）． この場合は

$$
(14)\qquad \sigma(\vec{x})\sigma(\vec{x}') = \langle\sigma(\vec{x})\sigma(\vec{x}')\rangle + \frac{a\epsilon(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{2\Delta_\sigma - \Delta_\epsilon}} + \cdots
$$

のようになる．

我々は転移点のことを考えていることを忘れてはならない．特に $h=0$ は仮定されている．(14) の形には，Ising 模型が $\sigma \to -\sigma$ の対称性をもっていることも含まれている．したがってこの展開 (14) では $\sigma(\vec{x})$ に比例する項がない．当然，別の展開

$$
(15)\qquad \sigma(\vec{x})\epsilon(\vec{x}') = \frac{b\sigma(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{\Delta_\epsilon}} + \cdots
$$

では $\epsilon(\vec{x})$ に比例する項がない．こうして対称性の条件により，(9) のなかでゼロでない項を選び出すことができる．もちろん定数 a または b の値は計算によってのみ導出できる．

話を完結させるため，もうひとつの展開も書いておこう．

$$
(16)\qquad \epsilon(\vec{x})\epsilon(\vec{x}') = \langle\epsilon(\vec{x})\epsilon(\vec{x}')\rangle + \frac{c\epsilon(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{\Delta_\epsilon}} + \cdots
$$

2 次元 Ising 模型． 2 次元 Ising 模型は $\sigma \to -\sigma$ の対称性に加えて，Kramers-Wannier の対称性（[1] と [2] を見よ）をもつ．臨界点の近くではこの対称性は置き換え $\tau \to -\tau$ あるいは $\epsilon \to -\epsilon$ に帰着される．この対称性は関係式のゼロでない係数の個数を減らす．

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad \sigma(\vec{x})\sigma(\vec{x}') &= \frac{a}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{1/4}} + b|\vec{x}-\vec{x}'|^{3/4}\epsilon(\vec{x}) + \cdots \\
(18)\qquad \epsilon(\vec{x})\epsilon(\vec{x}') &= \frac{a'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{2}} + (\text{次元} > \Delta_\epsilon \text{の量})
\end{aligned}
$$

2 次元 Ising 模型の対称性がもつ著しい特徴は Kadanoff と Ceva[2] によって解析されている．

代数的展開の応用と，よりこみ入った例（気液臨界点）は次の章で考えることにしよう．

代数の要素 $A_n(\vec{x})$ は揺らぐ諸量の完全系をなす．次元 $\Delta_n < d$ をもつ量はこの組のなかでも特別な役割を果たすことが分かった．

h_n は A_n と共役な場としよう（I 章 5 節を見よ）．すると感受率は

$$\chi_n^B = \frac{\partial\langle B\rangle}{\partial h_n} = \frac{1}{T}\sum_{\vec{x}}\langle\langle B(0)A_n(\vec{x})\rangle\rangle \tag{19}$$

で与えられる．χ を h_n で次々と微分することによって，平均のなかの余分な $A_n(\vec{x}')$ および $\vec{x}'$ にかんする和が増殖する．もし $\Delta_n < d$ ならば最終的な結果は発散する和になる．これは（$\Delta_n + \Delta_B < d$ の場合には）量 χ_n^B じしん，そうでなければ条件をみたすような h_n での高階微分が臨界点で発散していることを意味する．対応する量 $A_n(\vec{x})$ は慣例で**強い揺らぎ**と呼ばれる．

双局所的な相関関数の「分解」規則 (10) は Polyakov[3] によって初めて定式化された．この法則の代数的な定式化は Kadanoff[4] による．この代数の局所的な関係を最初に利用したのは本書著者たちと Khoklachev[5] のようだ．

(8 節) 臨界指数は何に依存しているか？(普遍性)

（VI 章）臨界指数の近似計算

(2 節) 臨界指数の近似計算

古典的に自己相互作用している場の異なる次数の相関関数たちを結びつけている一連の方程式は複雑なので、具体的に計算を実行するのは難しい（VII 章を見よ）。しかしながら 3 次元の模型、あるいは現実の物理系では長波長ゆらぎは弱いということが数値的に分かっている。これは秩序変数の次元 $\Delta_\phi = (1+\eta)/2$ が自由場の次元 $\Delta_\phi^0 = 1/2$ に近いことだけから明らかである。η の値は数値計算や実験から 0.05 程度であることが見いだされた（II 章を見よ)。臨界指数の近似的計算を実行するためにこの数値的な小ささをいかに活用するかということを説明しよう。

簡単のため、ハミルトニアン

$$H_{\text{int}} = \lambda\int A(\vec{x})d^dx, \quad A(\vec{x}) =: \phi^4(\vec{x}) : \tag{20}$$

で表される弱い相互作用が入ったスカラー場 $\phi(\vec{x})$ を考える。

相互作用エネルギー密度の次元 Δ_A は d 次元空間では $2(d-2)$ に等しい。特に $d=4$ の場合には $\Delta_A = 4 = d$ である。したがって 4 次元の場合には、相互作用によって基本的な指数が変更をうけることなく、相関関数に対数的補正が入ることになる（II 章 8 節を参照せよ)。これは揺らぎの有効的な相互作用が弱いことを意味する。量子場の理論ではこの種の解を「電荷ゼロ」の解、とか弱結合の解と呼ばれている [6]。

Wilson と Fisher[7] にしたがって 4 次元をわずかに外れた次元 d をもつ空間を形式的に考えよう。

$$4 - d = \epsilon \tag{21}$$

という記号を導入する。十分小さい ϵ に対しては、相互作用が十分小さいところにとどまり、臨界指数は自由場の対応する値に十分近いままである。したがって指数の変化は摂動論によって計算できるのである。同時に、この代数の基底は自由場のみたす

代数の基底、すなわち $:\phi:, :\phi^2:, \cdots, :\phi^n:, \cdots$ に近いといえる。言うまでもなく、整数値 $\epsilon = 0, 1, 2$ のみが物理的な意味をもつ。

3 次元空間の相互作用が弱いままであることの根拠として、$d = 3$ が $d = 4$ からかけはなれていないことが仮定されていると考えるのがよい。

この観点から相関関数 $\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{x}')\rangle$ を考えることからはじめよう。スケーリング次元 Δ_ϕ は $d = 4 - \epsilon$ 次元空間での自由場の場合、

$$\Delta_\phi^0 = \frac{d}{2} - 1 = 1 - \frac{\epsilon}{2} \tag{22}$$

に等しい（II 章 8 節を見よ）。

摂動 (20) の次元は

$$\Delta_A = 4\Delta_\phi^0 = 4 - 2\epsilon = d - \epsilon \tag{23}$$

(II.8.36) 式によればこのような摂動を入れた結果、摂動最低次の相互作用の次元が変更されることになる。

$$\Delta_\phi = \Delta_\phi^0 + \frac{2a}{b}(d - \Delta_A) = \Delta_\phi^0 + \frac{2a\epsilon}{b} \tag{24}$$

ここで a と b は代数のみたす以下の関係式たちの係数になっている。

$$A(\vec{x})\phi(0) = \frac{a}{x^{\Delta_A}}\phi(0) + \cdots \tag{25}$$

$$A(\vec{x})A(0) = \frac{b}{x^{\Delta_A}}A(0) + \cdots \tag{26}$$

計算するのは ϵ の 1 次までに制限しよう。これなら係数 a と b を ϵ のゼロ次まで、すなわち 4 次元空間の自由場の場合まで知れば十分である。したがってわれわれは積 $:\phi^4(\vec{x}):\phi(0)$ を考えよう。同一点の量を含まないようにすべての可能な対を構成すると、

$$\begin{aligned} :\phi^4(\vec{x}):\phi(0) &= 4\langle\phi^4(\vec{x})\phi(0)\rangle:\phi^3(\vec{x}): + :\phi^4(\vec{x})\phi(0): \\ &\simeq \frac{4}{x^2}:\phi^3(0): + :\phi^5(0): \end{aligned} \tag{27}$$

0 次の近似では (25) に出てくる $\phi(0)$ の係数 a はゼロに等しいことがこれを見ると分かる。指数 Δ_ϕ^0 への補正は ϵ の 2 次にのみ現れるのである。

さて、今度は以下で与えられるエネルギー密度の相関 $\langle\epsilon(\vec{x})\epsilon(\vec{x}')\rangle$ を考えよう。

$$\epsilon(\vec{x}) =:\phi^2(\vec{x}): \tag{28}$$

一般的な公式 (II.8.36) によると

$$\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^0 + \frac{2a'\epsilon}{b} + \cdots \tag{29}$$

である。ここで b は以前と同じように (26) で定義されており、また a' は以下の代数的関係式に出てくる係数である。

$$A(\vec{x})\epsilon(0) = \frac{a'}{x^{\Delta_A}}\epsilon(0) \tag{30}$$

$A(\vec{x}) =: \phi^4(\vec{x}) :$ および $\epsilon(0) =: \phi^2(0) :$ のおきかえを行うとともに、すべての可能なコントラクションをとると

$$\begin{aligned} A(\vec{x})\epsilon(0) &= \ :\phi^4(\vec{x})::\phi^2(0): \\ &= \ 12\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle^2 :\phi^2(\vec{x}): +8\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle :\phi^3(\vec{x})\phi(0): + :\phi^4(\vec{x})\phi^2(0): \\ &\simeq \ \frac{12}{x^4}\epsilon(0) + \frac{8}{x^2}A(0) + :\phi^6(0): \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} A(\vec{x})A(0) &= \ :\phi^4(\vec{x})::\phi^4(0): \\ &= \ 24\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle^4 + 96\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle^3 :\phi(\vec{x})\phi(0): +72\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle^2 :\phi^2(\vec{x})\phi^2(0): \\ & \quad +16\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle :\phi^3(\vec{x})\phi^3(0): + :\phi^4(\vec{x})\phi^4(0): \\ &\simeq \ \frac{24}{x^8} + \frac{96}{x^6}\epsilon(0) + \frac{72}{x^4}A(0) + \frac{16}{x^2} :\phi^6: + :\phi^8: \end{aligned}$$

のようになる。

(31) と (32) を (30) および (26) と比較すると、

$$a' = 12, \quad b = 72 \tag{32}$$

を得る。a' と b が分かれば Δ_ϵ を ϵ の一次まで知ることができる（(29) 参照)。

$$\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^0 + \frac{\epsilon}{3} = 2 - \frac{2\epsilon}{3} \tag{33}$$

$\Delta_\epsilon + \Delta_\tau = d$（II 章 5 節を見よ）という一般的な拘束関係式を利用すれば、Δ_τ を得る。

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{\epsilon}{3} \tag{34}$$

同じレベルの近似で、臨界指数 $\nu(r_c \sim \tau^{-\nu})$ および $\gamma(\chi \sim \tau^{-\gamma})$ を求めることは容易である。

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\Delta_\tau} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \\ \gamma &= \frac{d - 2\Delta_\phi}{\Delta_\tau} = (2-\eta)\nu \simeq 2\nu = 1 + \frac{\epsilon}{6} \end{aligned} \tag{35}$$

ここで

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

という関係を使えば、同じ近似で

$$\alpha = \frac{\epsilon}{6}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6} \tag{36}$$

となる。$\epsilon = 1$ という興味ある場合に関しては

$$\eta = 0, \nu = \frac{7}{12}, \gamma = \frac{7}{6}, \alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

になっている。第 1 次の近似ですら臨界指数は実験とよく合っている。

代数の k 番目のベクトル $A_k^0 =: \phi^k(\vec{x}) :$ の次元にかんする差 $\Delta_k - \Delta_k^0$ を求めよう。ふたたび Polyakov の公式

$$\Delta_k = \Delta_k^0 + \frac{2a_k\epsilon}{b} \tag{37}$$

を使おう。これは (??) と (??) を特別な場合として含んでいる。ここで

$$\Delta_k^0 = k\frac{d-2}{2} = k\frac{2-\epsilon}{2} \tag{38}$$

であり、係数 a_k は代数から得られる次の関係式で定義されている。

$$A_k^0(\vec{x})A(0) = \frac{a_k}{x^4}A_k^0$$

a_k という量は、k 人の女性と 4 人の男性のグループから 2 組のカップルをつくる場合の数と対応している。

$$a_k = 6k(k-1) \tag{39}$$

(39) を (37) に代入して、

$$\Delta_k = \Delta_k^0 + \frac{k(k-1)}{6}\epsilon \tag{40}$$

を得る。

最後にベクトル秩序変数 $\phi_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ で表される縮退した n 成分系を考えよう。$n > 1$ の場合には別の組み合わせ論的な問題が現れるため、代数に出てくる係数 a たちをあらたに計算し直す必要がある。例えば (31) と同様の展開に出てくる係数 a' を計算してみよう。縮退した系の場合には $\epsilon(\vec{x})$ と $A(\vec{x})$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{x}) &= \; :\phi^2(\vec{x}) :=: \phi_\alpha^2(\vec{x}): \\ A(\vec{x}) &= \; :\phi_\alpha^2(\vec{x})\phi_\beta^2(\vec{x}): \end{aligned} \tag{41}$$

$A(\vec{x})\epsilon(0)$ に出てくる $\epsilon(0)$ を計算するにあたって、ふたつのコントラクションを行う必要がある。今回はコントラクトによって

$$\phi_\alpha(\vec{x})\phi_\beta(\vec{x}') = \langle\phi_\alpha(\vec{x})\phi_\beta(\vec{x}')\rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \tag{42}$$

となっている。話を明確にするため、他の可能な組み合わせのうち、基本的なものを書いておこう。

$$:\phi_\alpha\phi_\alpha :: \phi_\beta\phi_\beta\phi_\gamma\phi_\gamma: \tag{43}$$

$$:\phi_\alpha\phi_\alpha :: \phi_\beta\phi_\beta\phi_\gamma\phi_\gamma: \tag{44}$$

最初の式は ϵ の係数に対応していて $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = n$ に等しい。(43) と同等な対を作る異なる場合の数は 4 に等しい。ふたつめの式は ϵ の係数 1 を与える。(44) と同等な対を作る異なる場合の数は 8 に等しい。よって

$$a' = 4n + 8 \tag{45}$$

である。同様の計算により

$$b = 8n + 64 \tag{46}$$

が得られる。最終的には

$$\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^0 + \frac{2a'\epsilon}{b} = \Delta_\epsilon^0 + \frac{n+2}{n+8}\epsilon \tag{47}$$

となる。(33) の公式は、(47) で $n = 1$ としたものに対応する特別な場合である。

われわれは得られた結果の普遍的な性質、すなわち相互作用の定数の大きさにはよらない指数に注目するのである[*訳注 4]。

[*訳注 4] 結合定数での展開が ϵ 展開に化けたのである

相互作用が弱いというアイディアを使って指数を計算する試みは Migdal[8] によって最初になされた。4 次元空間の問題の解は Sudakov[9] によってはじめて得られた。n 成分系の場合への一般化は Larkin と Khmel'nitskii[10] による。

References

[1] H.A. Kramers and G.H. Wannier, Phys. Rev. **60**, 252 (1941).
[2] L.P. Kadanoff and H. Ceva, Phys. Rev. **B3**, 3918 (1971).
[3] A.M. Polyakov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57**, 271 (1969) [Sov. Phys. JETP **30**, 151 (1970)].
[4] L.P. Kadanoff, Phys. Rev. Lett. **23**, 1430 (1969).
[5] A.Z. Patashinskii, V.L. Pokrovskii and S.B. Khokhlachev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **63**, 1521 (1972) [Sov. Phys. JETP **36**, 807 (1973)].
[6] L.D. Landau, A.A. Abrikosov and I.M. Khalatnikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **95**, 497, 773, 1177 (1954) [*The Collected Papers of L.D. Landau*, Pergamon Press, Oxford, 1965].
[7] K.G. Wilson and M.E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
[8] A.A. Migdal, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 1015 (1970) [Sov. Phys. JETP **32**, 552 (1971)].
[9] V.V. Sudakov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 87 (1956) [Sov. Phys. JETP **3**, 65 (1956)]; Dok. Akad. Nauk SSSR **111**, 338 (1956) [Sov. Phys. Doklady **1**, 662 (1956)].
[10] A.I. Larkin and D.E. Khmel'nitskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **56**, 2087 (1969) [Sov. Phys. JETP **29**, 1123 (1969)].

Translated by 市野悠