q-解析入門
～Jacobiの三重積公式～

京都大学理学部１年　市野 悠

2004年8月6日

ゼミの題材としてたまたま選んだ q-解析が，非常に面白く，しかも予備知識があまり必要ないので，書いてみました．この特集を言い出したのは僕なので，もう一つの特集に負けないように・・・．

最終的な目標は，Euler の恒等式（Jacobi の三重積公式の特別な場合）を導出することです．

はじめは定義が多くなるかもしれませんが，まあ我慢して聞いてください．

1　q-解析とは

q-解析は次の定義から始まります．

定義 1.1 任意の函数 $f(x)$ について q-微分を

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{1.1}$$

で定義する．

ここから始まって，通常の解析学の“ q-類似 ”と呼ばれるものが色々と出てくるということになっています．

特に $d_q x = (q-1)x$ である．さらに導函数を以下のように定義する．

定義 1.2 函数 $f(x)$ の q-導函数，h-導函数は，それぞれ

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \tag{1.2}$$

とする．

つまり通常の微積分で

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{1.3}$$

とか

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.4}$$

などとするところを変えてしまいます．

例 1.3 n は 0 でない自然数とする．上の定義の通りに $f(x) = x^n$ の q-導函数を求めると

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} \tag{1.5}$$

ここで，頻繁に出現する $\dfrac{q^n-1}{q-1}$ を，次のように表すことにする．

$$[n]=\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+\cdots+1 \tag{1.6}$$

次に積と商の導函数を計算する．(1.1) より

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx)-f(qx)g(x)+f(qx)g(x)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)d_qg(x)+g(x)d_qf(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

よって

$$D_q(f(x)g(x))=f(qx)D_qg(x)+g(x)D_qf(x) \tag{1.8}$$

同様に

$$D_q(f(x)g(x))=f(x)D_qg(x)+g(qx)D_qf(x) \tag{1.9}$$

とも表される．

(1.8) 式を

$$g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=f(x) \tag{1.10}$$

に適用すると，

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x)=D_qf(x) \tag{1.11}$$

したがって

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \tag{1.12}$$

となる．

しかし (1.9) を使うと，同様に

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(qx)D_qf(x)-f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \tag{1.13}$$

であるとも言える．

2 Taylor の公式の一般化

通常 $f(x)$ を $x=a$ を中心に Taylor 展開すると

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \tag{2.1}$$

である．ただしここでは Taylor の公式の q-類似を定式化したいので，Taylor の公式を一般化してしまおう．

定理 2.1 D を多項式空間上の線型作用素であるとする．さらに，$\{P_0(x),P_1(x),P_2(x),\cdots\}$ を，次の 3 つの条件をみたす多項式列として定義する．

1. $P_0(a)=1$ かつ $n\geq 1$ をみたす任意の自然数 n について，$P_n(a)=0$
2. $degP_n=n$

3. $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$ (ただし $n \geq 1$), さらに $D(1) = 0$

ここで次数 N である任意の多項式 $f(x)$ について，次のような一般化された Taylor の公式が得られる．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) P_n(x) \tag{2.2}$$

証明は省略するが, 多項式列 $\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_N(x)\}$ が線形独立であること．したがって定数 c_k によって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(x) \tag{2.3}$$

と線型結合の形に表されること．ここで 3 つの条件を使って c_k を具体的に求めればよい．

3 $(x+a)_q^n$ の q-Taylor 展開

q-解析では冪乗を

$$(x+a)_q^n = (x+a)(x+qa)\cdots(x+q^{n-1}a) \tag{3.1}$$

で定義している。これを $x = 0$ を中心に q-Taylor 展開したいのだが，その前にまず,

定理 3.1

$$D_q(x+a)_q^n = [n](x+a)_q^{n-1} \tag{3.2}$$

を帰納法で示す。

証明 3.2 $n = 1$ では明らかに正しいので、$D_q(x+a)_q^k = [k](x+a)_q^{k-1}$ を仮定する。すると $n = k+1$ で $(x+a)_q^{k+1} = (x+a)_q^k (x+q^k a)$ なので積の導函数公式 (1.9) を使って、

$$\begin{aligned} D_q(x+a)_q^{k+1} &= (x+a)_q^k + (qx+q^k a) D_q(x+a)_q^k \\ &= (x+a)_q^k + q(x+q^{k-1}a)\cdot[k](x+a)_q^{k-1} \\ &= (1+q[k])(x+a)_q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}(x+a)_q^k \\ &= [k+1](x+a)_q^k \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。よって任意の自然数 n について定理 3.1 は正しい。

すると、$f(x) = (x+a)_q^n$ として $j \leq n$ において q-微分を繰り返すと、

$$\begin{aligned} ({D_q}^j f)(x) &= {D_q}^{j-1}[n](x+a)_q^{n-1} = \cdots \\ &= [n][n-1]\cdots[n-j+1](x+a)_q^{n-j}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで, $(x+a)_q^m = (x+a)(x+qa)\cdots(x+q^{m-1}a)$ に $x = 0$ を代入すると $(a)(qa)\cdots(q^{m-1}a) = q^{\frac{m(m-1)}{2}} a^m$ だから、

$$({D_q}^j f)(0) = [n][n-1]\cdots[n-j+1] q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j}$$

となる。

さて，D_q が線型作用素であることは簡単にチェックできるので定理 2.1 を $D \equiv D_q$ の場合に適用してみよう．そのために以下のような $n!$ の q-類似体を使う．

$$[n]! = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ [n] \times [n-1] \times \cdots \times [1] & n = 1, 2, \cdots \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.5}$$

定理 2.1 の 3 つの必要条件を満たす多項式列は天下りではあるが，

$$P_j(x) = \frac{(x-a)_q^j}{[j]!} \qquad (j \in \mathbb{N})$$

とすればよい．

結局，次数 N の多項式 $h(x)$ を $x = a$ において q-Taylor 展開すると

$$h(x) = \sum_{j=0}^{N} ({D_q}^j h)(a) \frac{(x-a)_q^j}{[j]!} \tag{3.6}$$

であり、これを使って先ほどの多項式 $f(x)$ を $x = 0$ で q-Taylor 展開すると

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j} x^j \tag{3.7}$$

となる。

ただし $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ は次で与えられる。

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\cdots[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} \left(= \frac{[n]!}{[n-j]![j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \right) \tag{3.8}$$

よって j を $n-j$ で置き換えると

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j} \tag{3.9}$$

を得る。

4 Gauss の二項定理，Heine の二項定理から Euler の恒等式へ

この節では Jacobi の三重積公式の証明に使う 2 つの二項定理を導出する．

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} (a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)\cdots(a-q^{n-1}x) \\ &= (a-x)\cdot q(q^{-1}a-x)\cdot q^2(q^{-2}a-x)\cdots q^{n-1}(q^{-n+1}a-x) \\ &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)\cdots(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a) \end{aligned}$$

すなわち

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (x-q^{-n+1}a)_q^n \tag{4.1}$$

である。これを 2 回使うと、

$$\begin{aligned} D_q(a-x)_q^n &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot [n](x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} \\ &= -[n]q^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\ &= -[n]q^{n-1}(q^{-1}a-x)_q^{n-1} = -[n](a-qx)_q^{n-1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

を得る。最後に商の導函数 (1.12)：

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}. \tag{4.3}$$

を使って

$$\begin{aligned} D_q\frac{1}{(a-x)_q^n} &= \frac{-D_q(a-x)_q^n}{(a-x)_q^n(a-qx)_q^n} \\ &= -\frac{-[n](a-qx)_q^{n-1}}{(a-x)_q^n(a-qx)_q^n} \\ &= \frac{[n](a-qx)_q^{n-1}}{(a-x)_q^n(a-qx)_q^{n-1}(a-q^nx)} \\ &= \frac{[n]}{(a-x)_q^n(a-q^nx)} \\ &= \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる。

ここで $a=1$ とすれば $g(x)=\dfrac{1}{(1-x)_q^n}$ とおいて、

$$D_qg(x) = D_q\frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}}$$

なので、帰納的に

$$D_q{}^jg(x) = D_q{}^j\frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}}$$

となる。

すると $(D_q{}^jg)(0)=[n][n+1]\cdots[n+j-1]$ という性質が分かるので q-Taylor 展開の定義を拡張した

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(D_q{}^jQ)(c)\frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{4.5}$$

を使ってみると、$c=0$ で

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{[j]!}x^j = \sum_{j=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+j-1 \\ j \end{bmatrix}x^j \tag{4.6}$$

となっている。これを Heine の二項定理という.

Gauss の二項定理は (3.9) 式の x と a をそれぞれ 1、x で置き換えた、

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}x^j \tag{4.7}$$

である.

この 2 つの式は、通常の解析学（すなわち $q=1$）で $n\to\infty$ の極限をとっても面白くないが、q-解析では $|q|<1$ で有限値に収束する。

$|q|<1$ では

$$\lim_{n\to\infty}[n]=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q} \tag{4.8}$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}\\&=\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}\end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。これを利用して、Gauss の二項定理と Heine の二項定理での $n\to\infty$ の極限を $|q|<1$ において求められる。すなわち、

$$(1+x)_q^\infty=\sum_{j=0}^{\infty}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \tag{4.11}$$

が得られる。この 2 つが Euler の恒等式と呼ばれているもので、今後、前者を E1、後者を E2 と呼ぶことにする。

5 Jacobi の三重積公式および Euler の恒等式

定理 5.1 $|q|<1$ ならば次が成り立つ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}) \tag{5.1}$$

これを Jacobi の三重積公式という。

この公式は色々なところで使われていて，例えば ϑ 函数の無限和の部分を無限積に書き換えたりできる.

証明 5.2 (G.E.Andrews による．) E1 は

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^nx)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \tag{5.2}$$

と表される。ここで q を q^2 に、その後で x を zq に置き換えると

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2n+1}z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2j})}$$

すなわち

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2j})}$$

であるが、さらに両辺に

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

を掛けると、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{j^2}z^j\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2j+2})\right) \tag{5.3}$$

ただし $j\in[-\infty,0]$ の方は、ある $n\geq 0$ について $1-q^{2n+2J+2}=0$ となるものが必ず存在するから確かに消えている。

さて、(5.2) を再び使って、j を k に、q を q^2 に置き換えた後に、さらに x を $-q^{2j+2}$ で置き換えると、

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2j+2})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k^2+2kj+k}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}$$

となるので、(5.3) に代入すると、

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(j+k)^2+k}z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}z^j(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}\end{aligned} \tag{5.4}$$

（2 行目では指数 j を $j-k$ に変えている）

最後に、E2 で q を q^2 に、x を $-qz^{-1}$ に置き換えると

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} \tag{5.5}$$

であるから、(5.4) と (5.5) より、

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{j^2}z^j\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})}\right)\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})}\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{j^2}z^j\end{aligned}$$

と計算できる。ここで両辺に $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^{-1})$ を掛けると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n$$

となって、Jacobi の三重積公式は示された。

Jacobi の三重積公式の特別な場合として Euler の恒等式がある。Jacobi の三重積公式で $q=q^{\frac{3}{2}}$ それから $z=-q^{-\frac{1}{2}}$ を代入すると、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-2})(1-q^{3n-1})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{5.6}$$

なる Euler の恒等式を得る。

実は，Euler の恒等式は Gauss や Heine 以前に発見されたものであって，エレガントな方法で証明できる．（Euler 全集に証明があったと言って，齋藤恭司先生が喜んでおられました．）

名前の通り幾何学的な意味もあって，例えば左辺の q の肩に乗った $\frac{3n^2-n}{2}$ は五角数（普通 e_n で表す）になっています．

誤植，意見，苦情等は，次のアドレスまで．

ichino@mathscphys2004.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

参考文献

[1] V. Kac and P. Cheung, Quantum Calculus, Springer, 2001.

[2] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, Cambridge University Press, 1990.

[3] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, 1960.