ソリトン
—非線型の統合的理解—

京都大学理学部３年　市野 悠

2006 年 6 月 10 日

1　非線型に対する 2 つのアプローチ

非線型微分方程式に対する考え方は 2 通りある．ひとつは一般解を出さずに安定性などを議論する手法で，もうひとつは厳密解を求めるという，普通に考えられる方法である．前者は 2 種類に分類されて，そもそも一般解が見つかっていない場合（代表的なのは Navier-Stokes 方程式）と，見つかっているけど方程式そのものをにらんだり変形してやることによって，大域的な挙動が見えてくる場合とがある．

微分方程式というのは自然科学のありとあらゆる分野に現れる．そのマクロな（古典的な）対象が $(t;\boldsymbol{r})$ で記述され，変化をみているのだから必然的ではあるが，それにしても考えうる全ての微分作用素の組み合わせに対して，出てくる微分方程式の**型**というのは限られた種類しかないように思われる．

それは本質的には 2 つの理由に分けることができるように思う．一つは対称性，もうひとつは初期条件である．

自然界に存在する対称性によって，それを記述する方程式の型がかなりの制約を受けているというのは分かりやすい．（これは 6 節で述べるように保存量で規定されている気がする．）一方，初期条件のほうはどういうことかというと，たとえば物理で $\frac{d^2}{dt^2}$ までは出てくるが $\frac{d^3}{dt^3}$ という作用素はまず出てこない．（出てきたとしても積分できる．）これが何を意味するかというと「対称性によるフィルターにかけた高階の微分方程式でも，人間が直感的によく分かっている**加速度**のレベルにまで積分によって落とすことができて，残った**不定性**は初期条件というものに繰り込むことができる」ということだと考えられる．

ここまでの話から強く言える結論がひとつある．「ある型の方程式に限定した議論をする場合，それが自然界の対象と何らかの結びつきをもっていれば，それはいずれ普遍性という言葉で理解されるはずだ」と信じよう．ということである．だから振動子と密接に結びついた一階

線型常微分方程式（作用素で言えば $\frac{d^2}{dt^2}-1$）の研究には意味があるし，拡散方程式（$\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$）や波動方程式（$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$）を詳細に調べることは不毛な努力ではない．（というのが，微分方程式が好きになれない自分への長々しい訓示であります……）

以上の例で非線型は出てこなかったが，流体力学での運動方程式である Euler 方程式には非線型な項（$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{v}$）が出てくる．この項が出てくる過程を考えると，ミクロな流体粒子に対して Newton の運動方程式を適用した後（つまりここまでは線型），大域的な流体の挙動をみるために座標原点を統合したということになっている．*[1]以下で扱う KdV 方程式は Euler 方程式と全く同じ非線型項をもつ．これが Schrödinger 方程式と非常に面白い関係にあることが分かっている．さらに，KdV 方程式の直接的解法があるということも見る．その解法があるクラスの微分方程式系がもつ普遍性と関係がありそうだということも何となく感じ取れると思う．

またこの記事は，二つ目に挙げたアプローチ：「厳密解を求めよう！」という方針に基づいたものになっていることを言っておく．非線型方程式の「厳密解を求める」とは言っても，普通の意味では 2 節のような間接的方法ではなく，3 節のように線形方程式の問題に換言したり，摂動を使って解くことをさすことが多い．しかし 2 節から発展する話である散乱スペクトルの理論によって，ソリトンのもつ普遍性とか対称性との関係が見えてくる気がする．そして広田の直接法も生きてくるのではないかと思うのである．

2 Schrödinger **方程式と** KdV

Hamiltonian に系の時間依存を押しつけた作用素は次のような形で表される．

$$L(t) = -D^2 + u(x,t)$$

（以下 $D=\frac{d^2}{dx^2}$ とする．）この作用素の固有値問題は量子力学でいうエネルギー固有値の問題に対応しており，$L(t)\Psi=\lambda\Psi$ を考えないといけない．両辺に $\frac{d}{dt}$ を作用させると積の微分の意味で

$$L_t\Psi + L\Psi_t = \lambda_t\Psi + \lambda\Psi_t$$

（ただし今後 $\frac{\partial K}{\partial t}$ を K_t と略記することにする．）左辺は

$$\frac{d}{dt}(L\Psi) = \frac{d}{dt}(-D^2\Psi + u\Psi) = -\Psi_{xxt} + u_t\Psi + u\Psi_t = L\Psi_t + u_t\Psi$$

であったことを思い出すと作用素の意味で

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

*[1] 特定の流体粒子と一緒に動く Lagrange さんは何事も線型に見えているが，全流体粒子を見渡す Euler さんには非線型が見える．この例で言うと，Local から Global への移行で非線型が見えたとも言える．

が分かる．

改めて作用素 L を Heisenberg 表示したものについて考える．$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}$ というユニタリ作用素 $U(t)$ に時間依存を組み込んだ形にしておいて，新しい作用素 A を $A(t) = \frac{dU(t)}{dt}U(t)^{-1}$ と定義し，$L(t)U(t) = U(t)L(0)$ の両辺を微分すると

$$\frac{dL}{dt}U + L\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dt}L(0) = \frac{dU}{dt}U^{-1}UL(0)$$

ここまで変形しておいて両辺に U^{-1} を右からかけると

$$\frac{dL}{dt} = AL - LA = [A, L]$$

となる．これを先の (1) と見比べると，作用素の交換子が $[A, L] = \frac{\partial u}{\partial t}$ というただの掛け算になることが分かる．これを**半可換**な関係というが，これを満たすような A を求めるのは多少厄介である．

ここでは天下りに L と半可換な A として

$$A = -4D^3 + 3uD + 3Du$$

を与えてみる．注意深い計算により $[A, L] = \cdots = 6uu_x - u_{xxx}$ となることが確認できる[*2]．ここには D が陽に現れないので，半可換であるといえて，結局 $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$，すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

という KdV 方程式と，ハミルトニアンに関する

$$\frac{dL}{dt} = [A, L]$$

が同等の関係にあることが分かった．（これを KdV 方程式の **Lax 表示**という）

KdV 方程式を Lax 表示にしてしまうことによって，線型な Schrödinger 作用素の固有値問題を考えることになるという面白い性質が分かった．こうして一般解を求めていくのが**逆問題**と呼ばれている方法である．

3　広田微分と差分オペレータ

この節をまともに扱うと悲劇的な量になってしまうので，概要にとどめようと思う．

非線型の微分方程式の一般解を求める有効な方法として，変数変換によって線型の微分方程式に帰着するというものがある．広田の直接法というのはその変数変換を対称性をより強く残

[*2] この計算で D がうまく消えるのは楽しいが，結構長い．$Da = a_x + aD$ に注意して計算していくと確かにこうなる．

す**双線型**という形式で行った上で，摂動法を使うと厳密解がきれいに求まるということになっている．

KdV 方程式の解 $u(x,t)$ を $u=G/F$ という有理函数形に変換して，既に知られている孤立波解

$$u=-\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right)=\frac{2P^2\exp\eta}{(1+\exp\eta)^2}$$

を F と G がみたすように分離する．広田微分は次のように定義される．

$$D_t a\cdot b=a_t b-ab_t$$

この形式を使って，F と G についての条件を次の形で書いておく．

$$(D_t+{D_x}^3)G\cdot F=0,\quad {D_x}^2F\cdot F-2GF$$

以上から，どうも有理関数型に直せば上手く行きそうだということが分かる．[*3]

さらにより強い条件を u に課する．別の形：$u=2(\log f)_{xx}$ で変数変換すると（これは上で言うと $F=f^2, G=2(f_{xx}f-{f_x}^2)$ に対応しているが，ここまでの議論では天下りな経験則だとしか言えない.）

$$(D_xD_t+{D_x}^4)f\cdot f=0$$

となる．これを摂動計算：$f=1+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\cdots$ で解いたときに，先ほど挙げた孤立波解（1-ソリトン解）は $f_1=\exp\eta_1$ に対応している．（これは f^2 と上で使った F の形を見比べれば分かる.）$D_x(D_t+{D_x}^3)f_1=0$ をみたす f_1 を摂動の ε^2 の項に入れると

$$2D_x(D_t+{D_x}^3)f_2=0$$

となり，$f_2=0$ とできる．結局 1-ソリトン解に対応する $f=1+\exp\eta_1$ が得られるが，これは上に挙げた孤立波解とも一致している．

2-ソリトン解をどうやって求めるかというと，摂動で出てくる作用素 $D_x(D_t+{D_x}^3)$ が線型であることを考えて，重ね合わせを使えばよい．$f_1=\exp\eta_1+\exp\eta_2$ の場合どうなるかというと，摂動第 3 項が消せて

$$f=1+\varepsilon(\exp\eta_1+\exp\eta_2)+\varepsilon^2K\exp(\eta_1+\eta_2)$$

となる．ε を含む係数は exponential の中に組み込めばよい．

この節で扱った双線型化法は [5] を見ると，より親しみやすい形になっている．ただし，この本では双線型の作る普遍性は見えてこない．むしろ数値計算の差分スキームのヴァリエー

[*3] 本当は話が逆で，孤立波解が分かっているから「これは有理函数型に変数変換できるはずだ」と見抜き，分離を行うのである．

ションのうちのひとつみたいなものだと思われてしまうかもしれない. [*4]以下では KdV から対象を変えて，このスキームを使うと，早川くんの記事にもある Lotka-Volterra 方程式が双線型微分方程式を経て差分化されるという話をする. [*5]

4 Lotka-Volterra 方程式にソリトンがみえる

食物連鎖を表す Lotka-Volterra 方程式を問題にする．すなわち，以下で扱う

$$\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1})$$

は，添字 j で表される生物種が $j-1$ を捕食し，$j+1$ の犠牲となる場合になっている．ただし境界条件は $j \to \pm\infty$ で $u \to 1$ とする．（境界条件を変えれば 2 種間の相互作用もこのモデルで記述される）この方程式を次のように双線形化する．

$$u_j = \frac{f_{j-1}f_{j+2}}{f_j f_{j+1}}$$

これを代入すると広田微分を使って

$$f_{j+1}f_{j+2}D_t f_{j-1}\cdot f_j - f_{j-1}f_j D_t f_{j+1}\cdot f_{j+2} = f_{j-2}{f_{j+1}}^2 f_{j+2} - f_{j-1}{f_j}^2 f_{j+3}$$

となるので，大丈夫かなぁと思ってしまうが，右辺に $-f_{j-1}f_j f_{j+1}f_{j+2} + f_{j-1}f_j f_{j+1}f_{j+2}$ を挟んでやると大丈夫で，境界条件：$f_{j+1}/f_j \to c_{\pm\infty}$ を考慮すれば次の方程式を得る．

$$D_t f_j \cdot f_{j+1} = f_{j-1}f_{j+2} - f_j f_{j+1}$$

これを N-ソリトン解が存在するようなスキームで差分化すると，左辺は普通に前進差分だが，右辺を工夫して

$$\frac{1}{\delta}(f_j(t+\delta) - f_j(t))f_{j+1}(t) - f_j(t)\frac{1}{\delta}(f_{j+1}(t+\delta) - f_{j+1}(t)) = f_{j-1}(t)f_{j+2}(t+\delta) - f_j(t+\delta)f_{j+1}(t)$$

とすると，ゲージ変換：$f \to f\phi$ に対して不変な式になる．（ゲージはある種の対称性を体現している．）

[*4] 偶然ではあるが，この本を購入したきっかけは，23 回の翼セミナーで近藤健一氏が参加者発表でした差分と和分の話に興味をもったことである．セミナーから半年経たぬうちに発売されたのですぐに買ったのだが，さらに偶然にもこの本に載っている BZ 反応をテーマに，現在課題演習をやっている．しかも，偶然だと信じたいがその BZ 反応というのは参加した 23 回セミナーで行われた実験企画だったのだ．当時はマニアックな漸化式の解法とか，対称性と保存量が直結する美しさに酔いしれていたくらいだったと思うが，今となってはこの不思議な縁と，裏側にある普遍性に感動を覚える．

[*5] ここで双線型スキームを使ったことによって，Lotka-Volterra 方程式がソリトン解をもつという性質が保存される．

$f_j(t)=f_j(n\delta)=f_j^n$ で差分方程式の形にしたい．時刻 t で，元の変数変換を考えると

$$\frac{1}{\delta}(u_j^{n+1}-u_j^n)=u_j^n u_{j-1}^n-u_j^{n+1}u_{j+1}^{n+1}$$

という数値計算のスキームは得られる．

ここまででは微分方程式の数値的解法という雰囲気があるが，さらに計算機に適合した形にしようと思ったら，**超離散化**という操作を行う．この手法は

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon})=\max(A,B)$$

というところが本質的で，数値計算なら $\varepsilon\to+0$ をやるところを，計算機が簡単に扱える max という二項演算に書き換えてしまう．次節ではこれを先ほどの差分 Lotka-Volterra 方程式に適用してみる．

5　超離散化と箱玉系

$u_j^n=\exp(U_j^n/\varepsilon),\delta=\exp(-1/\varepsilon)$ と変数変換してから前節の差分方程式に代入し，$\varepsilon\to+0$ の極限でマックス-プラス代数の世界に移行すると

$$U_j^{n+1}-U_j^n=\max(0,U_{j-1}^n-1)-\max(0,U_{j+1}^{n+1}-1)$$

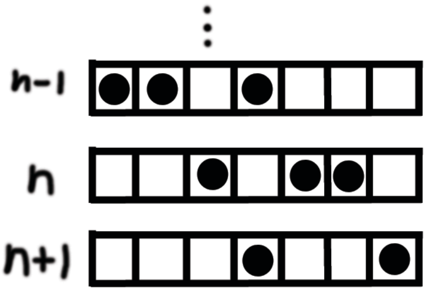
になる．感覚の問題で人によって捉え方は違うかもしれないが，圧倒的に扱いやすくなるし，計算機の威力が発揮されやすい漸化式の形になったというわけだ．これを**超離散 Lotka-Volterra 方程式**という．

面白いことに，Lotka-Volterra 方程式とは一見何の関係もなさそうな**箱玉系**からの変数変換によって，上の超離散方程式が得られることが分かっている．この箱玉系はソリトン解をもつ微分方程式の系を非常によく再現することも知られている．[*6]

まず箱玉系を紹介する．Rule は簡単で[*7]，下図のようなセルと，それに入ったボールを考える．左から順にセルの状態を読み取り，ボールが入っていたら取り出していく．そして初めに出会った空きのセルにボールをひとつずつ入れていく．これを図にすると下のようになる．走査が終わったら時間 n が $n+1$ になり，走査を最左端から再開する．

[*6] 例えば前の脚註で挙げた BZ 反応（反応拡散系）など

[*7] つまりこれを計算機に教えれば再現ができる．



この図で挙げた例が，既に「波の追い越し」というソリトンの性質を反映したものになっている．

これを同値な漸化式の形で表そうとすると（これは人間が式変形しやすいように行う）B_j^n を時刻 n に j 番目のセルに入っているボールの数（つまり 0 or 1）として，

$$B_j^{n+1} = \min\left(1 - B_j^n, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1})\right)$$

となる．これが箱玉系を再現していることはチェックしてほしい．これに 2 回の変数変換を施す．まず $S_j^n = \sum_{i=-\infty}^{j} B_i^n$ として

$$S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1} = \min(0, 1 - S_j^n + S_{j-1}^{n+1})$$

さらに $V_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1}$ とすると

$$V_{j+1}^{n+1} - V_j^n = \max(0, V_j^{n+1} - 1) - \max(0, V_{j+1}^n - 1)$$

となり，最後に $U_{j-n}^j = V_j^n$ でひっくり返すと，U_j^n に関する超離散方程式になる．

以上のことから，ソリトン解をもつ非線型微分方程式を lim で縮約して超離散方程式までいくと，ソリトンの性質をもつ箱玉系と結びつくことが分かると思う．

6　対称性と保存量

この節については強いことが言えないので，最後にもってきた．今後勉強していく際に常に意識していこうと思っている．

時空の対称性から古典的保存量（エネルギー，運動量，角運動量）が出てくることは周知の通りだが，実はその他ありとあらゆる対称性から何らかの保存則が現れることが分かっている．

これが上記のソリトン理論でどういう位置づけをもっているか考えてみると，2 節で挙げた逆問題というのは次のように理解できるような気もする．あるポテンシャル目がけてやってきた（Schrödinger 方程式に従う）波は，自然界の対称性に基づいた保存則をみたしてポテンシャルを通過し，散乱される．その散乱データ*8と，前提である保存則に基づいて計算すれば，Schrödinger 方程式の時間反転対称性から，ポテンシャルを決定することができる，すなわち逆問題によってポテンシャルの形が決まる（すなわち KdV 方程式が解ける）のは直感的に明らかなように思われる．(時間反転対称性がわずかに破れた場合，逆問題がどういう影響を受けるかについて考える必要があると思うが.）

この推論からは何か考慮すべき大事なことが抜けているような気がするし，まだあまり考えたわけではない．対称性と保存則という相対論的な話題と，逆問題という古典的話題がうまく結びつくのかどうかもよく分からないので，これから考えてみることにする．

また初めに挙げたように，微分方程式の**型**をきちんと分類してみたい．（ソリトンによって見えた普遍性を何となくではなく理解してみたいから.）これを自分でやっていないことが，どうも私が解析を嫌う遠因になっている気がする．それには**リー環**という言葉を使うようなので，今後何かあったら「リー」と唱えてみるのもいいかもしれない．

誤植，意見，苦情等は，次のアドレスまで：

ichino@mathscphys2004.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

参考文献

[1] 田中俊一, 伊達悦朗, 『KdV 方程式』, 紀伊國屋書店, 1979.
[2] G. L. Lamb, （戸田盛和訳）, 『ソリトン』, 培風館, 1983.
[3] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗, 『ソリトンの数理』, 岩波書店, 1993.
[4] 広田良吾, 『直接法によるソリトンの数理』, 岩波書店, 1992.
[5] 広田良吾, 高橋大輔, 『差分と超離散』, 共立出版, 2003.

*8 観測による効果を考えていないことに注意する必要はある．